

Matematica generale: compito del 20 maggio 2013

Tutte le risposte devono essere adeguatamente motivate.

Chi deve fare l'esame per meno di 9 CFU chieda al docente prima di iniziare il compito.

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 il compito verrà considerato insufficiente.

1. Denotando con $I(x_0, r)$ l'intorno sulla retta reale di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ e raggio $r \geq 0$, si considerino i 3 insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 3 - x \geq -1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \ln(3x^2) \in \mathbb{R}\}, \quad C = I(5, 2).$$

- (a) Dire, motivando le risposte, se $A \subseteq B$ e se $C \subseteq B$.
- (b) Determinare $A \cup C$ e $B \cup C$.
- (c) Determinare $A \cap B$ e $B \cap C$.

2. Risolvere la disequazione

$$\frac{5}{6-x} \leq x.$$

3. Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - 2}$$

determinarne

- (a) il dominio;
 - (b) il segno;
 - (c) gli eventuali asintoti;
 - (d) gli intervalli di crescita e decrescenza;
 - (e) eventuali punti di massimo e minimo, sia locali che globali;
 - (f) gli intervalli di convessità e concavità, e gli eventuali flessi;
 - (g) il grafico.
4. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dall'asse delle x e dal grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, in corrispondenza dell'intervallo $(1, 3)$.

5. Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^0 \ln(-x) dx.$$

6. Dire, giustificando la risposta, se le serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n+1}}{2^{3n}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{n}$$

convergono. Se sì, calcolarne la somma.

7. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) dire, motivando la risposta, se A è invertibile;
- (b) calcolare $A \cdot B$;
- (c) calcolare il rango di A e il rango di B .